Université Cadi-Ayyad
Faculté des Sciences Semlalia
Département des Mathématiques

Filière SMPC
S1-2013-2014
Algèbre I

Contrôle n°1

Durée 1H 30

Exercice 1 : (4 points)

Soit z le complexe donné par $z = \frac{(1+i\sqrt{3})^2}{1+i}$.

1. Mettre sous forme polaire le complexe z.
2. Mettre sous forme algébrique le nombre complexe z et en déduire la valeur de $cos(\frac{5\pi}{12})$.
3. Calculer le nombre z^3.

Exercice 2 : (6 points)

1. Déterminer les racines carrées du complexe $w = -2i$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :
$$z^2 + (i+1)z + i = 0$$
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :
$$z^3 = (1+i)^3.$$

Exercice 3 : (6 points)

1. Soit p_1 la fonction polynômiale :
$$p_1(x) = ax^2 + x + 1, \quad pour \quad a \in \mathbb{R}.$$
   i) Pour quelle valeur de a, la fonction polynômiale p_1 est irréductible sur $\mathbb{C}$.
   ii) Pour quelles valeurs de a, la fonction polynômiale p_1 est irréductible sur $\mathbb{R}$.
2. Soit p_2 la fonction polynômiale à coefficients réels donnée par :
$$p_2(x) = x^6 + 4x^4 + 5x^2 + 2.$$
   i) Vérifier que i est une racine de p_2 et déterminer sa multiplicité.
   ii) Décomposer en facteurs irréductibles p_2 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 : (4 points)

1. Soit p_3 une fonction polynômiale quelconque à coefficients complexes, déterminer le reste de la division Euclidienne de p_3 par la fonction polynômiale $p(x) = (x-1)^2$.
2. Effectuez la division suivant les puissances croissantes de $p_4(x) = 2$ par $p_5(x) = x + 1$ à l'ordre $k = 2$.

23

Correction Contrôle n°1

Exercice 1 : (4 points)

1. Mettre sous forme polaire le nombres complexe z :

$$z = 2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}} \quad \textbf{(1pt)}$$

2. Mettre sous forme algébrique le nombre complexe z :

$$z = (\sqrt{3}-1) + i(\sqrt{3}+1) \quad \textbf{(1pt)}$$

$$cos(\frac{5\pi}{12}) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \quad \textbf{(1pt)}$$

3. $z^3 = (2\sqrt{2})^3 e^{i\frac{5\pi}{4}} = -16(1+i)$ **(1 pt)**

Exercice 2 : (6 points)

1. Les racines carrées du complexe $w = -2i$ sont :

$$w_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} = (-1+i) \ \ et \ \ w_2 = -w_1 = 1-i \quad \textbf{(2pts)}$$

2. l'équation : $z^2 + (i+1)z + i = 0$ on a $\Delta = w = -2i$, les solutions sont :

$$z_1 = \frac{-(1+i)-1+i}{2} = -1 \ \ et \ \ z_2 = \frac{-(1+i)+1-i}{2} = -i \quad \textbf{(2 pts)}$$

3. L'équation : $z^3 = (1+i)^3$, les solutions sont :

$$\alpha_0 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}, \ \ \alpha_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{12}} \ \ et \ \ \alpha_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{19\pi}{12}} \quad (2 \text{ pts})$$

Exercice 3 : (6 points)

1. Soit p_1 la fonction polynômiale : $p_1(x) = ax^2 + x + 1, \ \ pour \ \ a \in \mathbb{R}$.
   i) Pour $a = 0$, la fonction polynômiale p_1 est irréductible sur $\mathbb{C}$ (1pt).

   ii) $si \ \ a \neq 0 \ \ \Delta = 1 - 4a < 0$ donc pour $a > \frac{1}{4} \ \ ou \ \ a = 0$, la fonction polynômiale p_1 est irréductible sur $\mathbb{R}$ **(1pt= 0,5 +0,5)**.
2. Soit p_2 à coefficients réels donnée par : $p_2(x) = x^6 + 4x^4 + 5x^2 + 2$.
   i) $p_2(i) = p_2'(i) = 0 \ \ et \ \ p_2''(i) \neq 0$ donc la multiplicité de i est $m = 2$ **(1pt)**.
   ii) Comme p_2 est à coefficients réels alors $-i$ est racine de multiplicité $m = 2$ de p_2 **(1pt)**.
   donc $(x^2+1)^2$ divise p_2 **(1pt)**.
   La division Euclidienne de p_2 par (x^2+1) donne

$$p_2(x) = (x^2+1)^2(x^2+2), \quad \textbf{(1pt)}$$

Exercice 4 : (4 points)

1. $p_3(x) = (x-1)q(x) + Ax + B$ **(1pt)**.
   $p_3'(1) = A \ \ et \ \ B = p_3(1) - p_3'(1)$ **(1pt)**.
2. La division suivant les puissances croissantes de $p_4(x) = 2$ par $p_5(x) = x + 1$ à l'ordre $k = 2$:

$$2 = (1+x)(2 - 2x + 2x^2) + x^{2+1}(-2) \quad \textbf{(2pts)}$$

Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences Semlalia
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2015-2016

Corrigé du Controle d'Algèbre SMPC S1. Janvier 2016

Ex 1: $z = \frac{2+4i}{2-i} = \frac{(2+4i)(2+i)}{|2-i|^2} = \frac{4-4+10i}{5} = 2i$. Alors la réponse est z est un imaginaire pure.

Ex 2: Comme $|z|$ est réel, il faut que $\bar{z} = a+2i$. Soit $z = a-2i$, ce module vaut $\frac{10}{3}$ il faut donc que la partie réelle de z fasse $\frac{8}{3}$ donc la réponse est $z = \frac{8}{3} - 2i$.

Ex 3: $|z-i| = |z+1+i|$ si et seulement si $x^2 + (y-1)^2 = (x+1)^2 + (y+1)^2$ ce qui conduit à la réponse : $2x + 4y + 1 = 0$.

Ex 4: la division Euclidienne de $X^n + X + 1$ par $(X-1)^2$ donne $X^n + X + 1 = (X-1)^2 Q(X) + R(X)$ avec degré de R est inférieur ou égal à 1, soit $R(X) = aX + b$. En donnant à x la valeur 1 on trouve $a + b = 3$, puis en considérant les dérivées et en donnant à x la valeur 1 on obtient : $n + 1 = a$, soit $b = 2 - n$, et par suite la réponse est $R(X) = (n+1)X + 2 - n$.

Ex 5: $3X^5 - 5X^4 + 5X - 3 = (X-1)^3(3X^2+4X+3)$ et $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ ainsi $G(X) = \frac{X^2-1}{3X^5-5X^4+5X-3} = \frac{(X-1)(X+1)}{(X-1)^3(3X^2+4X+3)} = \frac{(X+1)}{(X-1)^2(3X^2+4X+3)}$. De plus $3X^2+4X+3$ et $X+1$ sont premiers entre eux et -1 n'est pas racine de $3X^2+4X+3$, et par suite la réponse est : -1 est un pôle de G d'ordre 2.

Ex 6: $F(X) = \frac{2X^2+5X-3}{(2X^2+3X-2)^2} = \frac{2(X-\frac{1}{2})(X+2)}{4(X-\frac{1}{2})^2(X+2)^2} = \frac{1}{2(X-\frac{1}{2})(X+2)}$. Ainsi les pôles de F sont $\frac{1}{2}$, et -2.

Ex 7: $F(X) = \frac{1}{X(X^2+1)} = \frac{1+X^2-X^2}{X(X^2+1)} = \frac{1}{X} - \frac{X}{X^2+1}$. Donc la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ de la fraction rationnelle $F(X)$ est $\frac{1}{X} - \frac{X}{X^2+1}$.

Ex 8: $F(X) = \frac{X-1}{(X+1)^2(X^2-1)} = \frac{X-1}{(X+1)^3(X-1)} = \frac{1}{(X+1)^3}$. Ainsi la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ de la fraction rationnelle est $F(X) = \frac{1}{(X+1)^3}$.

Ex 9: le rang de $A \leq \inf(3,4) = 3$, et la matrice carrée d'ordre 3 $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ est une matrice extraite de A et son déterminant est non nul et vaut -4, donc le rang de A est bien 3.

Autrement par la méthode de Gauss on trouve une matrice echelonnée égale à $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ dont le déterminant est non nul, donc $rg(A) = 3$.

Ex 10: La matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3m-2 \\ 2 & 3 & 5 \\ -2m^2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ est symétrique si et seulement si $3m - 2 = -2m^2$ ce qui équivaut à $m \in \{\frac{1}{2}, -2\}$.

Ex 11: a) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On pose $B = A - I$. i) $B^2 = B \times B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

ii) $B^3 = B^2 \times B = B \times B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc B est nilpotente d'ordre 3.

iii) A^n, pour $n \geq 3$. On a $A = B + I$, et comme I commute avec B, alors par la formule du binôme on obtient :

$$A^n = (B+I)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B^k I^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B^k = \sum_{k=0}^{2} C_n^k B^k.$$

(car B est nilpotente). Ainsi

$$A^n = I + nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2 = \begin{pmatrix} 1 & n & n(n-2) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

iv) A est une matrice triangulaire donc $\det(A) = 1 \times 1 \times 1 = 1 \neq 0$, ainsi A est inversible.

v) A^{-1} par la méthode des cofacteurs.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t com(A) \text{ avec } com(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ et par suite } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ex 12 : Soit $P(X) = 3X^5 - 5X^4 + 5X - 3$.

a) $P(0) = -3$. et $P(1) = 3 - 5 + 5 - 3 = 0$.

b) Montrer que P admet une racine multiple, dont on déterminera l'ordre de multiplicité.
On sait que $P(1) = 0$, donc 1 est une racine de P, de plus $P'(X) = 15X^4 - 20X^3 + 5$, soit $P'(1) = 0$ et $P''(X) = 60X^3 - 60X^2$, soit $P''(1) = 0$. Mais $P'''(X) = 180X^2 - 120X$. Donc $P'''(1) = 180 - 120 = 60 \neq 0$. Ainsi 1 est une racine multiple de P d'ordre 3.

c) En déduire la factorisation en produit de facteurs irréductibles de $P(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$.
P est un polynome de degré 5 et $(X-1)^3$ divise P. Alors en effectuant la division Euclidienne de P par $(X-1)^3$ on obtient un quotient égal à $3X^2+4X+3$. Soit $P(X) = (X-1)^3(3X^2+4X+3)$
De plus $3X^2+4X+3$, est à descrtiminant $\Delta = 16 - 36 = -20 < 0$ donc $3X^2+4X+3$ est un polynome irréductible dans $\mathbb{R}[X]$. Ainsi la factorisation en produit de facteurs irréductibles de P dans $\mathbb{R}[X]$ est $P(X) = (X-1)^3(3X^2+4X+3)$.

Ex 13: Résoudre par la méthode de Gauss le système (S_α) suivant les valeurs du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$;

$$S_\alpha \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + \alpha z = 3 \\ x + \alpha y + 3z = -3 \end{cases}$$

La matrice augmentée associée au système S_α est $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & \alpha & 3 \\ 1 & \alpha & 3 & -3 \end{array}\right)$.

Et la matrice echelonnée associée au système est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & \alpha & 3 \\ 1 & \alpha & 3 & -3 \end{array}\right) \underset{L_3 \to L_3 - L_1}{\xrightarrow{L_2 \to L_2 - 2L_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha+2 & 1 \\ 0 & \alpha-1 & 4 & -4 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \to L_3 - (\alpha-1)L_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha+2 & 1 \\ 0 & 0 & 6-\alpha^2-\alpha & -(\alpha+3) \end{array}\right).$$

Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences Semlalia
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2015-2016

Corrigé du Controle d'Algèbre SMPC S1. Janvier 2016

Ex 1: $z = \frac{2+4i}{2-i} = \frac{(2+4i)(2+i)}{|2-i|^2} = \frac{4-4+10i}{5} = 2i$. Alors la réponse est z est un imaginaire pure.

Ex 2: Comme $|z|$ est réel, il faut que $\overline{z} = a+2i$. Soit $z = a-2i$, ce module vaut $\frac{10}{3}$ il faut donc que la partie réelle de z fasse $\frac{8}{3}$ donc la réponse est $z = \frac{8}{3} - 2i$.

Ex 3: $|z-i| = |z+1+i|$ si et seulement si $x^2 + (y-1)^2 = (x+1)^2 + (y+1)^2$ ce qui conduit à la réponse : $2x + 4y + 1 = 0$.

Ex 4: la division Euclidienne de $X^n + X + 1$ par $(X-1)^2$ donne $X^n + X + 1 = (X-1)^2 Q(X) + R(X)$ avec degré de R est inférieur ou égal à 1, soit $R(X) = aX + b$. En donnant à x la valeur 1 on trouve $a + b = 3$, puis en considérant les dérivées et en donnant à x la valeur 1 on obtient : $n + 1 = a$, soit $b = 2 - n$, et par suite la réponse est $R(X) = (n+1)X + 2 - n$.

Ex 5: $3X^5 - 5X^4 + 5X - 3 = (X-1)^3(3X^2 + 4X + 3)$ et $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ ainsi $G(X) = \frac{X^2-1}{3X^5-5X^4+5X-3} = \frac{(X-1)(X+1)}{(X-1)^3(3X^2+4X+3)} = \frac{(X+1)}{(X-1)^2(3X^2+4X+3)}$. De plus $3X^2 + 4X + 3$ et $X + 1$ sont premiers entre eux et -1 n'est pas racine de $3X^2 + 4X + 3$, et par suite la réponse est : -1 est un pôle de G d'ordre 2.

Ex 6: $F(X) = \frac{2X^2+5X-3}{(2X^2+3X-2)^2} = \frac{2\left(X-\frac{1}{2}\right)(X+2)}{4\left(X-\frac{1}{2}\right)^2(X+2)^2} = \frac{1}{2\left(X-\frac{1}{2}\right)(X+2)}$. Ainsi les pôles de F sont $\frac{1}{2}$, et -2.

Ex 7: $F(X) = \frac{1}{X(X^2+1)} = \frac{1+X^2-X^2}{X(X^2+1)} = \frac{1}{X} - \frac{X}{X^2+1}$. Donc la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ de la fraction rationnelle F(X) est $\frac{1}{X} - \frac{X}{X^2+1}$.

Ex 8: $F(X) = \frac{X-1}{(X+1)^2(X^2-1)} = \frac{X-1}{(X+1)^3(X-1)} = \frac{1}{(X+1)^3}$. Ainsi la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ de la fraction rationnelle est $F(X) = \frac{1}{(X+1)^3}$.

Ex 9: le rang de $A \leq \inf(3,4) = 3$, et la matrice carrée d'ordre 3 $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ est une matrice extraite de A et son déterminant est non nul et vaut -4, donc le rang de A est bien 3.

Autrement par la méthode de Gauss on trouve une matrice echelonnée égale à $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ dont le déterminant est non nul, donc $\text{rg}(A) = 3$.

Ex 10: La matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3m-2 \\ 2 & 3 & 5 \\ -2m^2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ est symétrique si et seulement si $3m - 2 = -2m^2$ ce qui équivaut à $m \in \left\{\frac{1}{2}, -2\right\}$.

Ex 11: a) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On pose $B = A - I$.i) $B^2 = B \times B =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ii) $B^3 = B^2 \times B = B \times B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc B est nilpotente d'ordre 3.

iii) A^n, pour $n \geq 3$. On a $A = B + I$, et comme I commute avec B, alors par la formule du binôme on obtient :

$$A^n = (B+I)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B^k I^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B^k = \sum_{k=0}^{2} C_n^k B^k.$$

(car B est nilpotente). Ainsi

$$A^n = I + nB + \frac{n(n-1)}{2}B^2 = \begin{pmatrix} 1 & n & n(n-2) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

iv) A est une matrice triangulaire donc $\det(A) = 1 \times 1 \times 1 = 1 \neq 0$, ainsi A est inversible.

v) A^{-1} par la méthode des cofacteurs.

$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t com(A)$ avec $com(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, et par suite $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ex 12 : Soit $P(X) = 3X^5 - 5X^4 + 5X - 3$.

a) $P(0) = -3$. et $P(1) = 3 - 5 + 5 - 3 = 0$.

b) Montrer que P admet une racine multiple, dont on déterminera l'ordre de multiplicité.
On sait que $P(1) = 0$, donc 1 est une racine de P, de plus $P'(X) = 15X^4 - 20X^3 + 5$, soit $P'(1) = 0$ et $P''(X) = 60X^3 - 60X^2$, soit $P''(1) = 0$. Mais $P'''(X) = 180X^2 - 120X$. Donc $P'''(1) = 180 - 120 = 60 \neq 0$. Ainsi 1 est une racine multiple de P d'ordre 3.

c) En déduire la factorisation en produit de facteurs irréductibles de $P(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$.
P est un polynome de degré 5 et $(X-1)^3$ divise P. Alors en effectuant la division Euclidienne de P par $(X-1)^3$ on obtient un quotient égal à $3X^2+4X+3$. Soit $P(X) = (X-1)^3(3X^2+4X+3)$
De plus $3X^2 + 4X + 3$, est à descrtiminant $\Delta = 16 - 36 = -20 < 0$ donc $3X^2 + 4X + 3$ est un polynome irréductible dans $\mathbb{R}[X]$. Ainsi la factorisation en produit de facteurs irréductibles de P dans $\mathbb{R}[X]$ est $P(X) = (X-1)^3(3X^2+4X+3)$.

Ex 13: Résoudre par la méthode de Gauss le système (S_α) suivant les valeurs du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$;

$$S_\alpha \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + \alpha z = 3 \\ x + \alpha y + 3z = -3 \end{cases}$$

La matrice augmentée associée au système S_α est $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & \alpha & 3 \\ 1 & \alpha & 3 & -3 \end{array}\right)$.

Et la matrice echelonnée associée au système est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & \alpha & 3 \\ 1 & \alpha & 3 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \to L_3 - L_1]{L_2 \to L_2 - 2L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha+2 & 1 \\ 0 & \alpha-1 & 4 & -4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_3 \to L_3 - (\alpha-1)L_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha+2 & 1 \\ 0 & 0 & 6-\alpha^2-\alpha & -(\alpha+3) \end{array}\right).$$

Comme: $6 - \alpha^2 - \alpha = -(\alpha - 2)(\alpha + 3)$.

1er cas: Si $\alpha = 2$ alors le système est incompatible car on trouve $0 = -5$.

2ème cas: Si $\alpha = -3$ alors, on aura $0z = 0$ soit z quelconque, $y = 1 + z$ et $x = 1 - y + z = 1 - 1 - z + z = 0$. Donc S_{-3} admet une infinité de solutions à savoir $\{(0, 1 + z, z),$ avec $z \in \mathbb{R}\}$.

3ème cas : Si $\alpha \notin \{-3, 2\}$, alors S_α admet une solution unique donnée par $(\alpha - 2)(\alpha + 3)z = \alpha + 3$, soit $z = \frac{1}{\alpha-2}$, $y = \frac{-4}{\alpha-2}$ et $x = \frac{\alpha+3}{\alpha-2}$. La solution est donnée par $\left\{\left(\frac{\alpha+3}{\alpha-2}, \frac{-4}{\alpha-2}, \frac{1}{\alpha-2}\right)\right\}$.

v) Par la méthode de Gauss, résoudre le système $\begin{cases} ax+y+z=a^2-3 \\ x+ay+z=2a-4 \\ x+y+az=-2 \end{cases}$, en fonction de a

Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences Semlalia

Année Universitaire 2015-2016
Département de Mathématiques

Nom: .... Prénom ....
N de Table .... N Appogé ....

Controle de Rattrapage d'Algèbre SMPC S1. Durée: 2 H: VARIANTE II

Mettré une croix ☒ pour la réponse vraie (il y a une seule).

Ex 1: Le nombre complexe $z=\frac{1-i\sqrt{3}}{(1+i)^2}$

est de module 1 — un de ses arguments est $\frac{7\pi}{3}$ — $z=\bar{z}$ — $Re(z)=2$ — $Im(z)=\sqrt{3}$

Ex 2: Soit $P(Z)=Z^4+2Z^2-8Z+5$

- Les racines de P sont toutes imaginaires
- Les racines de P sont toutes réelles
- 1 n'est pas racine de P
- P admet 4 racines simples
- $(Z-1)^2$ divise P
- i est une racine de P

Ex 3: Les racines n ièmes de -1 sont

- $e^{\frac{i2k\pi}{n}}$, $k=0,1.....,n-1$
- $\{-1,0,1\}$
- $e^{\frac{i\pi}{n}(k+1)}$, $k=0,1.....,n-1$
- $e^{\frac{2i\pi}{n}(k-1)}$, $k=0,1.....,n-1$
- $e^{\frac{i\pi}{n}(k-1)}$, $k=0,1.....,n-1$
- .... autre

Ex 4: Un argument de $z=-3\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{i}\right)$ est égal à

$\frac{\pi}{6}$ — $\frac{7\pi}{6}$ — $-\frac{\pi}{6}$ — $\frac{5\pi}{6}$ — .... autre

Ex 5: La forme irréductible de la fraction rationnelle réelle $F(X)=\frac{2X^3-4X^2+5X-3}{(X-1)^2(X^2+1)^2}$ est

- $\frac{2X^2-2X-1}{(X-1)^2(X^2+1)^2}$
- $\frac{2X^2-2X-1}{(X-1)^2(X^2+1)^2}$
- $\frac{2X^2+X-1}{(X-1)^2(X^2+1)^2}$
- $\frac{2X^2-5X+3}{(X-1)^2(X^2+1)^2}$
- $\frac{2X^2-2X-1}{(X-1)^2(X^2+1)}$
- .... autre

Ex 6: Le quotient de la division suivant les puissances croissantes à l'ordre 3 de X^n+X+1 par $1-X$ est (pour $n \succ 3$)

- $1-2X-2X^2-2X^3$
- $1+2X+2X^2+2X^3$
- $1-X+nX$
- $1+nX-2nX^2+2X^3$
- $1+2X-2X^2-2X^3$
- .... autre

Ex 7: Soit $P(X) = X^3 + aX^2 + bX + 1$, $a, b \in \mathbb{R}$. -1 est une racine triple de P si

☐ $a = 2$ et $b = -3$ ☐ $a = b = 1$ ☐ $a = b = -3$ ☐ $a = -3$ et $b = 3$ .... autre

Ex 8 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & m & m-1 \\ 3 & m & m \\ m-1 & m & m+1 \end{pmatrix}$

i) $A - mI$ est inversible si

☐ $m \notin \{0, 2\}$ ☐ $m \notin \{0, \frac{5}{2}\}$ ☐ $m \notin \{0, \frac{-5}{2}\}$ ☐ $m \notin \{0, -2\}$ .... autre

ii) Le rang de A est égal à 2 si

☐ $m \in \{0, 6\}$ ☐ $m \neq 0$ ☐ $m \in \{0, 2\}$ ☐ $m \notin \{0, 4\}$ .... autre

iii) Det (A) est égal à

☐ $m^3 - 5m$ ☐ $m^2(m-4)$ ☐ $(m-1)(a-4)$ ☐ $m(2-m)$ .... autre

Ex 9: Soit le polynome $P \in \mathbb{R}[X]$, avec $P(X) = X^5 - 3X^4 + 4X^3 - 4X^2 + 3X - 1$.

i) Montrer que P admet une racine multiple et déterminer son ordre.

ii) Donner la décomposition en produit de facteurs irréductibles de P dans $\mathbb{R}[X]$

iii) Donner la décomposition en produit de facteurs irréductibles de P dans $\mathbb{C}[X]$

iv) Effectuer la division suivant les puissances croissantes à l'ordre 2 de 1 par $Y^2 + 2Y + 2$

v) Endéduire la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$, de la fraction rationnelle $F(X) = \frac{1}{P(X)}$

vi) En déduire la partie polaire relative au pole 1 de F

Ex 10: On considère la matrice $M(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{C}$.

i) Calculer $M(a).M(b)$

ii) Calculer $\det(M(a))$

iii) Pour quelles valeurs de a, $M(a)$ est inversible?

iv) En déduire le rang de $M(a)$ en fonction de a

Université Cadi Ayyad — Année Universitaire 2015-2016 ABDESLam

Faculté des Sciences Semlalia

Département de Mathématiques

Controle d'Algèbre SMPC S1. Durée: 2 H "CORRIGÉ"

Mettre une croix (.....) pour la réponse vraie (il y a une seule).

Ex 1: Soit le complexe $z = \dfrac{2+4i}{2-i}$. Alors

- ( ) Le point M d'affixe z est sur le cercle unité
- ( ) $z = \overline{z}$
- ( ) $z = \frac{2}{3}i$
- (X) z est un imaginaire pure

Ex 2: Soit z un nombre complexe vérifiant $|z| + \overline{z} = 6 + 2i$. Alors l'expression algébrique de z est

- ( ) $-\frac{8}{3} - 2i$
- ( ) $\frac{8}{3} + 2i$
- (X) $\frac{8}{3} - 2i$
- ( ) $-\frac{8}{3} + 2i$

Ex 3: Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ $(x, y \in \mathbb{R})$ tel que $|z - i| = |z + 1 + i|$. Alors

- ( ) $y = x$
- (X) $2x + 4y + 1 = 0$
- ( ) $y = -x$
- ( ) $2x - y + 1 = 0$

Ex 4: Le reste de la division euclidienne de $X^n + X + 1$ par $(X-1)^2$ est (pour $n \geq 3$)

- ( ) $X + 1$
- ( ) $X^2 - 1$
- (X) $(n+1)X + 2 - n$
- ( ) $(n-1)X + 1 - n$.

Ex 5: l'ordre du pôle 1 de la fraction rationnelle $G(X) = \frac{X^2-1}{3X^5-5X^4+5X-3}$ est

- (X) 2
- ( ) 3
- ( ) 1
- ( ) 4

Ex 6: Les pôles de la fraction rationnelle réelle $F(X) = \frac{2X^2+5X-3}{(2X^2+3X-2)^2}$ sont

- (X) $\{\frac{1}{2}, -2\}$
- ( ) $\{-\frac{1}{2}, 2\}$
- ( ) $\{-\frac{1}{2}, 3\}$
- ( ) $\{\frac{1}{2}, -3\}$

Ex 7: La décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ de La fraction rationnelle $F(X) = \frac{1}{X(X^2+1)}$ est

- ( ) $\frac{-1}{X} + \frac{X}{X^2+1}$
- ( ) $\frac{1}{X} + \frac{X-1}{X^2+1}$
- ( ) $\frac{1}{X} + \frac{X}{X^2+1}$
- (X) $\frac{1}{X} - \frac{X}{X^2+1}$

Ex 8: La décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ de La fraction rationnelle $F(X) = \frac{X-1}{(X+1)^2(X^2-1)}$ est

- ( ) $\frac{1}{(X+1)^2} + \frac{1}{X-1}$
- ( ) $\frac{1}{(X+1)^2} - \frac{1}{(X+1)} + \frac{1}{X-1}$
- ( ) $\frac{-1}{(X+1)^2} + \frac{1}{X^2-1}$
- (X) $\frac{1}{(X+1)^3}$

Ex 9 : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, alors le rang de A est:

- ( ) 4
- ( ) 2
- ( ) 1
- (X) 3

1

(25)

Ex 10: Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3m-2 \\ 2 & 3 & 5 \\ -2m^2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, alors A est symétrique si

(X) $m \in \{\frac{1}{2}, -2\}$ ◯ $m \in \{\frac{-1}{2}, 2\}$ ◯ $m \in \{\frac{1}{2}, 2\}$ ◯ $m \in \{\frac{-1}{2}, -2\}$

Ex 11: a) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On pose $B = A - I$.

i) Calculer B^2.

$$B^2 = B \times B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ii) Calculer B^3.

$$B^3 = B \times B^2 = B^2 \times B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

iii) En deduire A^n pour $n \geq 3$. B est nilpotente d'ordre 3

$A = I + B$ et I commute avec B, donc par la formule du binôme $A^n = (I+B)^n = \sum_0^n C_n^k B^k I^{n-k} = \sum_0^2 C_n^k B^k$ car $B^k = 0$ pour $k \geq 3$

ainsi $A^n = C_n^0 I + C_n^1 B + C_n^2 B^2 = I + nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & n(n-2) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

iv) Montrer que A est inversible

A est triangulaire supérieure, donc $\det A = 1 \times 1 \times 1 = 1$

$\det A \neq 0$ donc A est inversible

v) Calculer A^{-1} par la méthode des cofacteurs. $A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t Co_A$

$Co_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ alors ${}^t Co_A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

et par suite $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$

$p(x) = (x-1)^3(3x^2+4x+3)$ est sa forme Irreductible

Ex 13: Résoudre pa...

Ex 13: Résoudre par la méthode de Gauss le système (S_α) suivant les valeurs du papamètre $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$S_\alpha \begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+3y+\alpha z=3 \\ x+\alpha y+3z=-3 \end{cases}$$

- La matrice augmentée de S_α est

- $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & \alpha & 3 \\ 1 & \alpha & 3 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \to L_3 - L_1]{L_2 \to L_2 - 2L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha+2 & 1 \\ 0 & \alpha-1 & 4 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \to L_3 - (1-\alpha)L_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha+2 & 1 \\ 0 & 0 & 6-\alpha-\alpha^2 & -(3+\alpha) \end{array}\right)$$

or $6-\alpha-\alpha^2 = (2-\alpha)(3+\alpha)$ on conclut que

- Si $\alpha = 2$, alors S_2 est incompatible (car on trouve $0 = -5$)
- Si $\alpha = -3$, alors $0 \cdot z = 0$ donc z est quelconque

$y = 1 - (\alpha+2)z = 1+z$ soit $y = 1+z$

$x = 1 - y + z = 1 - (1+z) + z = 0$

donc $S_\alpha = \{(0, 1+z, z), z \in \mathbb{R}\}$

- Si $\alpha \notin \{-3, 2\}$ alors le système admet une seule solution

$(2-\alpha)(3+\alpha)z = -(\alpha+3)$ soit $z = \dfrac{1}{\alpha-2}$

$y = 1 - (\alpha+2)z = 1 - \dfrac{\alpha+2}{\alpha-2} = \dfrac{-4}{\alpha-2}$

$x = 1 - y + z = 1 + \dfrac{4}{\alpha-2} + \dfrac{1}{\alpha-2} = \dfrac{\alpha-2+4+1}{\alpha-2} = \dfrac{\alpha+3}{\alpha-2}$

$$S_\alpha = \left\{\left(\frac{\alpha+3}{\alpha-2}, \frac{-4}{\alpha-2}, \frac{1}{\alpha-2}\right)\right\}$$

Ex 12 : Soit $P(X) = 3X^5 - 5X^4 + 5X - 3$.

a) Calculer

$P(0) = \cancel{3}\ -3$

$P(1) = 3 - 5 + 5 - 3 = 0$

b) Montrer que P admet une racine multiple, dont on déterminera l'ordre de multiplicité.

- Comme $P(1) = 0$, alors 1 est une racine au moins simple de P
- De plus $P'(x) = 15x^4 - 20x^3 + 5$, donc $P'(1) = 15 - 20 + 5 = 0 \Rightarrow$ 1 racine a moins double
- $P''(x) = 60x^3 - 60x^2 \Rightarrow P''(1) = 60 - 60 = 0$, donc 1 est racine d'ordre ≥
- $P'''(x) = 180x^2 - 120x \Rightarrow P'''(1) = 180 - 120 = 60 \neq 0$

Ainsi 1 est une racine multiple d'ordre 3

c) En déduire la factorisation en produit de facteurs irréductibles de $P(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$.

- $d°P = 5$ et 1 est racine d'ordre 3 donc $P(x) = (x-1)^3 Q(x)$ avec $d°Q = 2$, le coefficient dominant de P est 3 et le terme constant est -3 alors $P(x) = (x-1)^3(3x^2 + ax + 3)$

- Comme $P(-1) = -16 = -8(6-a)$ alors $a = 4$
- Soit $P(x) = (x-1)^3(3x^2 + 4x + 3)$ et comme $3x^3 + 4x + 3$ est à discriminant $\Delta = 16 - 36 = -20 < 0$, donc $3x^3 + 4x + 3$ est irréductible dans $\mathbb{R}[x]$. Ainsi, dans $\mathbb{R}[x]$ ...

ii) Donner la décomposition en produit de facteurs irréductibles de P dans $\mathbb{R}[X]$.

iii) Donner la décomposition en produit de facteurs irréductibles de P dans $\mathbb{C}[X]$

iv) Effectuer la division suivant les puissances croissantes à l'ordre 2 de 3 par $Y^2 + 3Y + 3$

v) En déduire la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$, de la fraction rationnelle $F(X) = \frac{3}{P(X)}$

vi) En déduire la partie polaire relative au pole 1 de F ....

Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences Semlalia

Année Universitaire 2015-2016
Département de Mathématiques

Nom: .... Prénom ....
N de Table .... N Appogé ....

Controle de Rattrapage d'Algébre SMPC S1. Durée: 2 H: *VARIANTE I*

Mettre une croix ☒ pour la réponse vraie (il y a une seule).

Ex 1: Soit $P(Z) = Z^4 + 2Z^2 - 8Z + 5$.

- ☐ 1 n'est pas racine de P
- ☐ P admet 4 racines simples
- ☐ Si α est racine de P alors $-\alpha$ est aussi racine
- ☐ Les racines de P sont toutes réelles
- ☐ $(Z-1)^2$ divise P
- ☐ i est une racine de P

Ex 2: Un argument de $z = -3\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{i}\right)$ est égal à

☐ $\frac{\pi}{6}$ ☐ $\frac{7\pi}{6}$ ☐ $-\frac{\pi}{6}$ ☐ $\frac{5\pi}{6}$ .... autre

22

Ex 3: Le nombre complexe $z = \frac{1-i\sqrt{3}}{(1+i)^2}$

☐ est de module 1 ☐ un de ses arguments est $\frac{7\pi}{3}$ ☐ $z = \bar{z}$ ☐ $\mathrm{Re}(z) = 2$ ☐ $\mathrm{Im}(z) = \sqrt{3}$

Ex 4: Les racines n ièmes de -1 sont

☐ $e^{\frac{i2k\pi}{n}}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ ☐ $\{-1, 0, 1\}$ ☐ $e^{\frac{i\pi}{n}(k+1)}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$

☐ $e^{\frac{i2\pi}{n}(k-1)}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ ☐ $e^{\frac{i\pi}{n}(k-1)}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ .... autre

Ex 5: Le quotient de la division suivant les puissances croissantes à l'ordre 3 de $X^n + X + 1$ par $1 - X$ est (pour $n > 3$)

☐ $1 - 2X + 2X^2 + 2X^3$ ☐ $1 + 2X - 2X^2 + 2X^3$ ☐ $1 - X + nX$
☐ $1 + nX - 2nX^2 + 2X^3$ ☐ $1 + 2X - 2X^2 - 2X^3$ .... autre

Ex 6: Soit $P(X) = X^3 + aX^2 + bX + 1$, $a, b \in \mathbb{R}$. -1 est une racine triple de P si

☐ $a = 2$ et $b = -3$ ☐ $a = b = 1$ ☐ $a = b = -3$ ☐ $a = -3$ et $b = 3$ .... autre

Ex 7: La forme irréductible de la fraction rationnelle réelle $F(X) = \frac{2X^3 - 4X^2 + 5X - 3}{(X-1)^3(X^2+1)^2}$ est

☐ $\frac{2X^2 - 2X - 1}{(X-1)^3(X^2+1)^2}$ ☐ $\frac{2X^2 - 2X - 1}{(X-1)^2(X^2+1)^2}$ ☐ $\frac{2X^2 + X - 1}{(X-1)^2(X^2+1)^2}$

☐ $\frac{2X^2 - 5X + 3}{(X-1)^2(X^2+1)^2}$ ☐ $\frac{2X^2 - 2X - 1}{(X-1)^2(X^2+1)}$ .... autre

Ex 8 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a-1 \\ 3 & a & a \\ a-1 & a & a+1 \end{pmatrix}$

i) Le rang de A est égal à 2 si

☐ $a \in \{0,6\}$ ☐ $a \neq 0$ ☐ $a \in \{0,2\}$ ☐ $a \notin \{0,4\}$ .... autre

ii) Det (A) est égal à

☐ $a^3 - 5a$ ☐ $a^2(a-4)$ ☐ $(a-1)(a-4)$ ☐ $a(2-a)$ .... autre

iii) $A - aI$ est inversible si

☐ $a \notin \{0,2\}$ ☐ $a \notin \{0,\frac{5}{2}\}$ ☐ $a \notin \{0,\frac{-5}{2}\}$ ☐ $a \notin \{0,-2\}$ .... autre

Ex 9: On considère la matrice $M(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 2a & a & 2 \\ a & 1 & a \end{pmatrix}$

i) Calculer $M(a)^2$...

ii) Calculer det $(M(a))$...

iii) Pour quelles valeurs de a, $M(a)$ est inversible?...

iv) En déduire le rang de $M(a)$ en fonction de a ....

v) Par la méthode de Gauss, résoudre système $\begin{cases} ax + y + z = a^2 \\ 2ax + ay + 2z = 2a^2 \\ ax + y + az = 1 \end{cases}$, en fonction de a...

2

Ex 10: Soit le polynome $P \in \mathbb{R}[X]$, avec $P(X) = X^5 - 2X^4 + X^3 - X^2 + 2X - 1$.

i) Montrer que P admet une racine multiple et déterminer son ordre...

3

Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences Semlalia

Année Universitaire 2015-2016
Département de Mathématiques

Nom: .... Prénom ....
N de Table .... N Appogé ....

Controle de Rattrapage d'Algèbre SMPC S1. Durée: 2 H: *VARIANTE I*

Mettre une croix ☐ pour la réponse vraie (il y a une seule).

Ex 1: Soit $P(Z) = Z^4 + 2Z^2 - 8Z + 5$.

1

- ☐ 1 n'est pas racine de P
- ☐ P admet 4 racines simples
- ☐ Si α est racine de P alors $-\alpha$ est aussi racine
- ☐ Les racines de P sont toutes réelles
- ☒ $(Z-1)^2$ divise P
- ☐ i est une racine de P

Ex 2: Un argument de $z = -3\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{i}\right)$ est égal à

1

☐ $\frac{\pi}{6}$ ☐ $\frac{7\pi}{6}$ ☐ $-\frac{\pi}{6}$ ☒ $\frac{5\pi}{6}$ .... autre

Ex 3: Le nombre complexe $z = \frac{1-i\sqrt{3}}{(1+i)^2}$

1

☒ est de module 1 ☐ un de ses arguments est $\frac{7\pi}{3}$ ☐ $z = \overline{z}$ ☐ $\mathrm{Re}(z) = 2$ ☐ $\mathrm{Im}(z) = \sqrt{3}$

Ex 4: Les racines n ièmes de -1 sont

1

☐ $e^{\frac{i2k\pi}{n}}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ ☐ $\{-1, 0, 1\}$ ☐ $e^{\frac{i\pi}{n}(k+1)}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$

☐ $e^{\frac{i2\pi}{n}(k-1)}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ ☐ $e^{\frac{i\pi}{n}(k-1)}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ $e^{\frac{i\pi}{n}(2k+1)}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ autre

Ex 5: Le quotient de la division suivant les puissances croissantes à l'ordre 3 de $X^n + X + 1$ par $1 - X$ est (pour $n > 3$)

1

☐ $1 - 2X + 2X^2 + 2X^3$ ☐ $1 + 2X - 2X^2 + 2X^3$ ☐ $1 - X + nX$

☐ $1 + nX - 2nX^2 + 2X^3$ ☐ $1 + 2X - 2X^2 - 2X^3$ $1 + 2X + 2X^2 + 2X^3$ autre

Ex 6: Soit $P(X) = X^3 + aX^2 + bX + 1$, $a, b \in \mathbb{R}$. -1 est une racine triple de P si

1

☐ $a = 2$ et $b = -3$ ☐ $a = b = 1$ ☐ $a = b = -3$ ☐ $a = -3$ et $b = 3$ $a = b = 3$ autre

Ex 7: La forme irréductible de la fraction rationnelle réelle $F(X) = \frac{2X^3-4X^2+5X-3}{(X-1)^3(X^2+1)^2}$ est

1

☐ $\frac{2X^2-2X-1}{(X-1)^3(X^2+1)^2}$ ☐ $\frac{2X^2-2X-1}{(X-1)^2(X^2+1)^2}$ ☐ $\frac{2X^2+X-1}{(X-1)^2(X^2+1)^2}$

☐ $\frac{2X^2-5X+3}{(X-1)^2(X^2+1)^2}$ ☐ $\frac{2X^2-2X-1}{(X-1)^3(X^2+1)}$ $\frac{2X^2-2X+3}{(X-1)^2(X^2+1)^2}$ autre

28

Ex 8 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a-1 \\ 3 & a & a \\ a-1 & a & a+1 \end{pmatrix}$

i) Le rang de A est égal à 2 si

1 ☒ $a \in \{0,6\}$ ☐ $a \neq 0$ ☐ $a \in \{0,2\}$ ☐ $a \notin \{0,4\}$ .... autre

ii) Det (A) est égal à

1 ☐ $a^3 - 5a$ ☐ $a^2(a-4)$ ☐ $(a-1)(a-4)$ ☐ $a(2-a)$ $a(a-6)$ autre

iii) $A - aI$ est inversible si

1 ☐ $a \notin \{0,2\}$ ☐ $a \notin \{0, \frac{5}{2}\}$ ☐ $a \notin \{0, \frac{-5}{2}\}$ ☐ $a \notin \{0,-2\}$ $a \notin \left\{0, -2, \frac{3}{2}\right\}$ autre

Ex 9: On considère la matrice $M(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 2a & a & 2 \\ a & 1 & a \end{pmatrix}$

i) Calculer

$M(a)^2 = \begin{pmatrix} a^2+3a & 2a+1 & 2a+2 \\ 4a^2+2a & a^2+2a+2 & 6a \\ 2a^2+2a & 3a & a^2+a+2 \end{pmatrix}$ 0,5

ii) Calculer det $(M(a))$.

$\det(M(a)) = a^3 - 3a^2 + 2a = a(a-1)(a-2)$ 0,5

iii) Pour quelles valeurs de a, $M(a)$ est inversible?

$a \notin \{0,1,2\}$ 0,25

iv) En déduire le rang de $M(a)$ en fonction de a

0,25 * Si $a \notin \{0,1,2\}$, $\mathrm{rg}(A) = 3$

0,5 * Si $a = 0$, $\mathrm{rg}(A) = 2$

0,5 * Si $a = 1$, $\mathrm{rg}(A) = 2$

0,5 * Si $a = 2$, $\mathrm{rg}(A) = 2$

v) Par la méthode de Gauss, résoudre $\begin{cases} ax+y+z=a^2 \\ 2ax+ay+2z=2a^2 \\ ax+y+az=1 \end{cases}$, en fonction de a

(0,5) Matrice augmentée associée au système $\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & a^2 \\ 2a & a & 2 & 2a^2 \\ a & 1 & a & 1 \end{array}\right)$

* Si $a=0$, alors $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$

Donc $z=0, y=1$ et $y+z=0$. Système incompatible

(1,5) * Si $a \neq 0$, alors $\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & a^2 \\ 2a & a & 2 & 2a^2 \\ a & 1 & a & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[l_3 \to l_3 - l_1]{l_2 \to l_2 - 2l_1} \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & a^2 \\ 0 & a-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a^2 \end{array}\right)$

(0,5) * Si $a=2$, alors $z=-3$ et $2x+y=7$. Donc $S=\{(x, 7-2x, -3) : x \in \mathbb{R}\}$

(0,5) * Si $a=1$, z est quelconque, $y=0$ et $x=1-z$. Donc $S=\{(1-z, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$

(0,5) * Si $a \notin \{0,1,2\}$, alors le système admet une solution unique

$$S=\left\{\left(\frac{a^2+a+1}{a}, 0, -1-a\right)\right\}$$

Ex 10: Soit le polynome $P \in \mathbb{R}[X]$, avec $P(X)=X^5-2X^4+X^3-X^2+2X-1$.

i) Montrer que P admet une racine multiple et déterminer son ordre.

(1) $P(1)=P'(1)=P''(1)=0$

$P'''(1)=18 \neq 0$

1 est une racine d'ordre 3 de $P(X)$

ii) Donner la décomposition en produit de facteurs irréductibles de P dans $\mathbb{R}[X]$.

Par division Euclidienne:

$$\begin{array}{l|l} X^5-2X^4+X^3-X^2+2X-1 & X^3+3X^2+3X+1 \\ \cline{2-2} \ldots\ldots & X^2+X+1 \\ 0 & \end{array}$$

(0,5) X^2+X+1 irreductible dans $\mathbb{R}$ car à discriminant $\Delta=-3<0$

$P(X)=(X-1)^3(X^2+X+1)$ décomposition dans $\mathbb{R}[X]$

(29)

iii) Donner la décomposition en produit de facteurs irréductibles de P dans $\mathbb{C}[X]$
$P(X) = (X-1)^3 (X-j)(X-\bar{j})$ où $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

0,25

iv) Effectuer la division suivant les puissances croissantes à l'ordre 2 de 3 par $Y^2 + 3Y + 3$

On obtient

$$3 = \left(1 - Y + \frac{2}{3}Y^2\right)\left(3 + 3Y + Y^2\right) + Y^3\left(-1 - \frac{2}{3}Y\right)$$

1

v) En déduire la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$, de la fraction rationnelle $F(X) = \frac{3}{P(X)}$

On pose $Y = X-1$, donc $1+X+X^2 = 3+3Y+Y^2$. Par suite

$$F(X) = \frac{1}{Y^3} - \frac{1}{Y^2} + \frac{2}{3Y} - \frac{1+\frac{2}{3}Y}{3+3Y+Y^2}$$

0,5

En remplaçant Y par $X-1$, on obtient

$$F(X) = \frac{1}{(X-1)^3} - \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{2}{3(X-1)} - \frac{1+2X}{3(X^2+X+1)}$$

1

vi) En déduire la partie polaire relative au pole 1 de F

Réponse :

$$\frac{1}{(X-1)^3} - \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{2}{3(X-1)}$$

0,25

Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences Semlalia

Année Universitaire 2015-2016
Département de Mathématiques

Nom: .... Prénom ....
N de Table .... N Appogé ....

Controle de Rattrapage d'Algébre SMPC S1. Durée: 2 H: ***VARIANTE II***

Mettre une croix ☐ pour la réponse vraie (il y a une seule).

Ex 1: Le nombre complexe $z = \frac{1-i\sqrt{3}}{(1+i)^2}$

1 ☒ est de module 1 ☐ un de ses arguments est $\frac{7\pi}{3}$ ☐ $z = \overline{z}$ ☐ $\mathrm{Re}(z) = 2$ ☐ $\mathrm{Im}(z) = \sqrt{3}$

Ex 2: Soit $P(Z) = Z^4 + 2Z^2 - 8Z + 5$

1
☐ Les racines de P sont toutes imaginaires
☐ Les racines de P sont toutes réelles
☐ 1 n'est pas racine de P
☐ P admet 4 racines simples
☒ $(Z-1)^2$ divise P
☐ i est une racine de P

Ex 3: Les racines n ièmes de -1 sont

1
☐ $e^{\frac{i2k\pi}{n}}$, $k = 0, 1....., n-1$ ☐ $\{-1, 0, 1\}$ ☐ $e^{\frac{i\pi}{n}(k+1)}$, $k = 0, 1....., n-1$
☐ $e^{\frac{2i\pi}{n}(k-1)}$, $k = 0, 1....., n-1$ ☐ $e^{\frac{i\pi}{n}(k-1)}$, $k = 0, 1....., n-1$ $\underline{e^{\frac{i\pi}{n}(2k+1)}, k = 0, 1....., n-1}$ autre

Ex 4: Un argument de $z = -3\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{i}\right)$ est égal à

1 ☐ $\frac{\pi}{6}$ ☐ $\frac{7\pi}{6}$ ☐ $-\frac{\pi}{6}$ ☒ $\frac{5\pi}{6}$ .... autre

Ex 5: La forme irréductible de la fraction rationnelle réelle $F(X) = \frac{2X^3-4X^2+5X-3}{(X-1)^3(X^2+1)^2}$ est

1
☐ $\frac{2X^2-2X-1}{(X-1)^3(X^2+1)^2}$ ☐ $\frac{2X^2-3X-1}{(X-1)^2(X^2+1)^2}$ ☐ $\frac{2X^2+X-1}{(X-1)^2(X^2+1)^2}$
☐ $\frac{2X^2-5X+3}{(X-1)^2(X^2+1)^2}$ ☐ $\frac{2X^2-2X-1}{(X-1)^3(X^2+1)}$ $\underline{\frac{2X^2-2X+3}{(X-1)^2(X^2+1)^2}}$ autre

Ex 6: Le quotient de la division suivant les puissances croissantes à l'ordre 3 de $X^n + X + 1$ par $1 - X$ est (pour $n \succ 3$)

1
☐ $1 - 2X - 2X^2 - 2X^3$ ☐ $1 + 2X + 2X^2 + 2X^3$ ☐ $1 - X + nX$
☐ $1 + nX - 2nX^2 + 2X^3$ ☐ $1 + 2X - 2X^2 - 2X^3$ $\underline{1 + 2X + 2X^2 + 2X^3}$ autre

31

Ex 7: Soit $P(X) = X^3 + aX^2 + bX + 1$, $a, b \in \mathbb{R}$. -1 est une racine triple de P si

☐ $a = 2$ et $b = -3$ ☐ $a = b = 1$ ☐ $a = b = -3$ ☐ $a = -3$ et $b = 3$ $a = b = 3$ autre

1

Ex 8 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & m & m-1 \\ 3 & m & m \\ m-1 & m & m+1 \end{pmatrix}$

i) $A - mI$ est inversible si

☐ $m \notin \{0, 2\}$ ☐ $m \notin \{0, \frac{5}{2}\}$ ☐ $m \notin \{0, \frac{-5}{2}\}$ ☐ $m \notin \{0, -2\}$ $m \notin \left\{0, -2, \frac{3}{2}\right\}$ autre

1

ii) Le rang de A est égal à 2 si

☒ $m \in \{0, 6\}$ ☐ $m \neq 0$ ☐ $m \in \{0, 2\}$ ☐ $m \notin \{0, 4\}$ .... autre

1

iii) Det (A) est égal à

☐ $m^3 - 5m$ ☐ $m^2(m-4)$ ☐ $(m-1)(a-4)$ ☐ $m(2-m)$ $m(m-6)$ autre

1

Ex 9: Soit le polynome $P \in \mathbb{R}[X]$, avec $P(X) = X^5 - 3X^4 + 4X^3 - 4X^2 + 3X - 1$.

i) Montrer que P admet une racine multiple et déterminer son ordre.

$P(1) = P'(1) = P''(1) = 0$.

$P'''(1) = 12 \neq 0$.

1 est une racine d'ordre 3 de $P(X)$.

1

ii) Donner la décomposition en produit de facteurs irréductibles de P dans $\mathbb{R}[X]$

Par division Euclidienne:

$$\begin{array}{l|l} X^5 - 3X^4 + 4X^3 - 4X^2 + 3X - 1 & X^3 + 3X^2 + 3X + 1 \\ \hline \cdots\cdots & X^2 + 1 \\ 0 & \end{array}$$

0,5

$X^2 + 1$ irreductible dans $\mathbb{R}$ car à discriminant $\Delta = -4 < 0$

$P(X) = (X-1)^3 (X^2 + 1)$ décomposition dans $\mathbb{R}[X]$.

iii) Donner la décomposition en produit de facteurs irréductibles de P dans $\mathbb{C}[X]$

$P(X) = (X-1)^3 (X-i)(X+i)$

0,25

iv) Effectuer la division suivant les puissances croissantes à l'ordre 2 de 1 par $Y^2 + 2Y + 2$.

On obtient $1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}Y + \frac{1}{4}Y^2\right)(2 + 2Y + Y^2) - \frac{1}{4}Y^4$

1

v) En déduire la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$, de la fraction rationnelle $F(X) = \frac{1}{P(X)}$

On pose $Y = X-1$, donc $1+X^2 = 2+2Y+Y^2$. Par suite

0,5

$$F(X) = \frac{1}{2Y^3} - \frac{1}{2Y^2} + \frac{1}{4Y} - \frac{1}{4}\frac{Y}{2+2Y+Y^2}$$

En remplaçant Y par $X-1$, on obtient

1

$$F(X) = \frac{1}{2(X-1)^3} - \frac{1}{2(X-1)^2} + \frac{1}{4(X-1)} - \frac{X-1}{4(X^2+1)}$$

vi) En déduire la partie polaire relative au pole 1 de F

0,25

$$\frac{1}{2(X-1)^3} - \frac{1}{2(X-1)^2} + \frac{1}{4(X-1)} - \frac{X-1}{4(X^2+1)}$$

Ex 10: On considère la matrice $M(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{C}$.

i) Calculer

$$M(a).M(b) = \begin{pmatrix} ab+2 & a+b+1 & a+b+1 \\ a+b+1 & ab+2 & a+b+1 \\ a+b+1 & a+b+1 & ab+2 \end{pmatrix}$$

0,5

ii) Calculer $\det(M(a))$

$$\det(M(a)) = a^3 - 3a + 2 = (a+2)(a-1)^2$$

0,5

iii) Pour quelles valeurs de a, $M(a)$ est inversible?

$M(a)$ inversible $\Leftrightarrow a \notin \{-2, 1\}$

0,25

iv) En déduire le rang de $M(a)$ en fonction de a

0,5 $*$ Si $a = 1$, $M(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, donc $\mathrm{rg}(A) = 1$.

0,5 $*$ Si $a = -2$, $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, donc $\mathrm{rg}(A) = 2$.

$*$ Si $a \notin \{-2, 1\}$, $\mathrm{rg}(A) = 3$.

0,25

v) Par la méthode de Gauss, résoudre le système $\begin{cases} ax + y + z = a^2 - 3 \\ x + ay + z = 2a - 4 \\ x + y + az = -2 \end{cases}$, en fonction de a

Matrice augmentée associée au système

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & a^2-3 \\ 1 & a & 1 & 2a-4 \\ 1 & 1 & a & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{l_1 \leftrightarrow l_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & -2 \\ 1 & a & 1 & 2a-4 \\ a & 1 & 1 & a^2-3 \end{pmatrix}$$

$$\underset{l_3 \to l_3 - al_1}{\xrightarrow{l_2 \to l_2 - l_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & -2 \\ 0 & a-1 & 1-a & 2(a-1) \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & a^2-3+2a \end{pmatrix}$$

$$\underset{l_3 \to l_3 + l_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & -2 \\ 0 & a-1 & 1-a & 2(a-1) \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & a^2+4a-5 \end{pmatrix}$$

1,5

$$\longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & -2 \\ 0 & a-1 & 1-a & 2(a-1) \\ 0 & 0 & -(a-1)(a+2) & (a-1)(a+5) \end{pmatrix}$$

car $2 - a - a^2 = -(a-1)(a+2)$ et $a^2 + 4a - 5 = (a-1)(a+5)$

0,5 $*$ Si $a = 1$, alors le système admet une infinité de solutions $S = \{(-2 - y - z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}$

$*$ Si $a = -2$, alors le système est incompatible car eq3 $\Leftrightarrow 0 = -9$.

0,5 $*$ Si $a \notin \{1, -2\}$, alors le système admet une unique solution

0,5 $z = -\dfrac{a+5}{a+2}$, $y = 2 + z = \dfrac{a-1}{a+2}$ et $x = -2 - y - az = \dfrac{a^2+2a-3}{a+2} = \dfrac{(a+3)(a-1)}{a+2}$